Théorème : $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Preuve. Soit $f : (x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \longmapsto \frac{e^{-tx^2}}{1+x^2}$ et $h : t \in \mathbb{R}^+ \mapsto \int_0^{+\infty} f(x,t)\,dx$ $\forall t \geq 0$.

h est bien défini car : $\forall t \geq 0$, $|f(x,t)| \leq \frac{1}{1+x^2}$ et $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{T \to +\infty} [\arctan(x)]_0^T = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$.

De plus, h est continue : $\forall t \geq 0$, $f(\cdot,t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $\forall x \geq 0$, $f(x,\cdot)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. Donc, par le théorème de continuité sous-signe intégrale,

h est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Enfin, $h \in C^1(\mathbb{R}_+^*)$: $\forall t > 0$, $f(\cdot,t)$ est intégrable, $\forall x \geq 0$, $f(x,\cdot) \in C^1(\mathbb{R}^+)$ car la fonction exponentielle est C^1 sur $\mathbb{R}$, $f'(x,\cdot) : t \in \mathbb{R}^+ \mapsto -\frac{x^2}{1+x^2} e^{-tx^2}$,

et $\forall x > 0$, $\forall t \geq a > 0$, $\left|-\frac{x^2}{1+x^2} e^{-tx^2}\right| \leq e^{-tx^2} \leq e^{-ax^2} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$, donc $\frac{\partial f}{\partial t} f(x,t) \in L^1([a;+\infty[)$. Ceci étant vrai $\forall a > 0$, $\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) \in L^1(\mathbb{R}_+^*)$.

$\lambda(\{0\}) = 0$

Ainsi, par le théorème de dérivation sous signe intégrale, h est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $h'(t) = -\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^2} e^{-tx^2}\,dx = -\int_0^{+\infty}\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) e^{-tx^2}\,dx = h(t) - \int_0^{+\infty} e^{-tx^2}\,dx$.

Ainsi, on remarque h est solution de l'équation différentielle ordinaire $(\mathcal{E})$: $y'(t) - y(t) = -\int_0^{+\infty} e^{-tx^2}\,dx$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

À présent, soit $\varphi : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \sqrt{t}\,x$ $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$. Alors, φ est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, $\varphi \in C^1(\mathbb{R}_+^*)$ et $\varphi^{-1} : x \in \mathbb{R}_+^* \to \frac{1}{\sqrt{t}} x \in C^1(\mathbb{R}_+^*)$.

Donc, φ est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ et $\int_0^{+\infty} e^{-tx^2}\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-t\varphi^{-1}(x)^2} |\mathrm{Jac}_{\varphi^{-1}}(x)|\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \frac{1}{\sqrt{t}}\,dx$ $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$.

Ainsi, $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $(\mathcal{E})$: $h'(t) = h(t) - \frac{1}{\sqrt{t}} I$, $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$

Résolvons $(\mathcal{E})$. $h(t) = Ce^t$, $C \in \mathbb{R}$, est solution de l'équation homogène. Trouvons la solution particulière grâce à la variation de la constante :

Soit y une solution de $(\mathcal{E})$ sous la forme $y(t) = C(t)e^t$, $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $C \in C^1(\mathbb{R}_+^*)$.

Alors, $y'(t) = C'(t)e^t + C(t)e^t$ et donc $y'(t) - y(t) = C'(t)e^t = -\frac{1}{\sqrt{t}} I$ $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$. Alors, $C'(t) = -\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} I$ et une primitive de C' est $C(t) = -I\int_0^t \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,du$

avec, $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $\int_0^t \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,du \leq \int_0^t \frac{1}{\sqrt{u}}\,du < +\infty$ par le critère de Riemann. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u}} < +\infty$ par Riemann $+ \int_1^t \frac{1}{\sqrt{u}} < +\infty$ par continuité de $\frac{1}{\sqrt{u}}$.

De plus, soit $\varphi : u \in]0;t[\mapsto \sqrt{u} \in]0;\sqrt{t}[$ un C^1-difféomorphisme. Alors, $C(t) = -I\int_0^t \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,du = -I\int_0^{\sqrt{t}} \frac{e^{-v^2}}{v} 2v\,dv = -2I\int_0^{\sqrt{t}} e^{-v^2}\,dv$.

Ainsi, les solutions de $(\mathcal{E})$ sont $S = \left\{ Ce^t - 2Ie^t \int_0^{\sqrt{t}} e^{-v^2}\,dv \mid C \in \mathbb{R} \right\}$.

Enfin, étudions S et h afin de déterminer I.

Soit $y \in S$, alors $\lim\limits_{t \to 0^+} y(t) = C$. De plus, $h(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$ et $h_{|\mathbb{R}_+^*} \in S$, donc $h(t) = e^t\left(\frac{\pi}{2} - 2I\int_0^{\sqrt{t}} e^{-v^2}\,dv\right)$.

Pour continuer, par le théorème de convergence dominée, $h(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$ donc $h(t)e^{-t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$ et $\frac{\pi}{2} - 2I\int_0^{\sqrt{t}} e^{-v^2} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$.

Ainsi, $\frac{\pi}{2} = 2I^2 \Rightarrow \frac{\pi}{4} = I^2 \Rightarrow I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. $\square$

Référence : Carnet de voyage en Analystan, Caldero.

Leçons : 221 - 236 - 239 - 234 - 235 - 220 à condition que le second dev soit en lien avec les EDO non linéaires

Remarques : - Simple mais calculatoire, ça a au moins le mérite de rentrer dans toutes les leçons d'intégration tout en remplissant la leçon 221 (pratique pour ceux qui comme moi n'aiment pas les EDO).

- Ici j'ai tout rédigé mais on peut aller bien plus vite au tableau, tout écrire n'a pas vraiment d'intérêt.